Correction TD - E5

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Calcul d'une valeur efficace ★☆☆ 2901

Signal créneau :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\ dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T dt} \\ &= \boxed{1\text{ V}} \end{aligned}$$

Ex. n°2 • Représentation spectrale ★☆☆ 6838

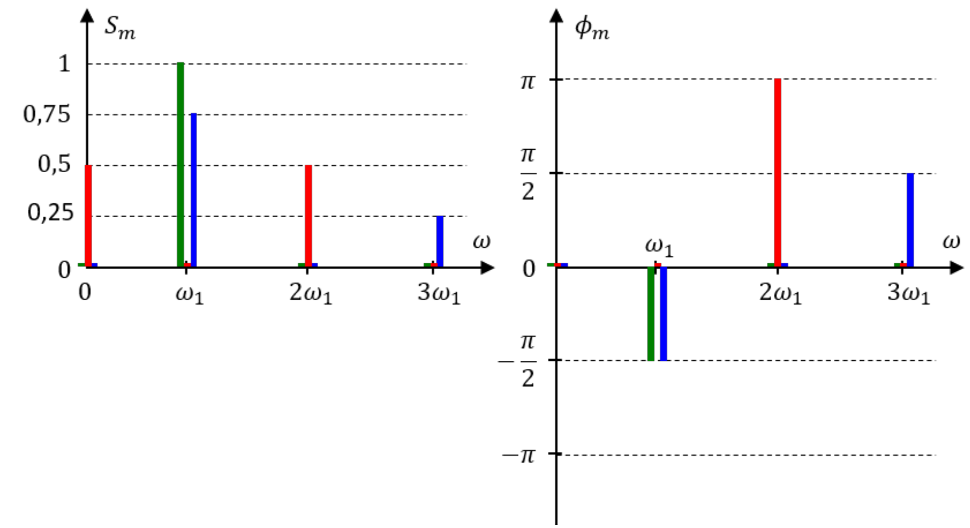
1) On utilise les relations trigonométriques :

$$s_1(t) = \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$s_2(t) = \frac{1-\cos(2\omega_1 t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_1 t + \pi)$$

$$s_3(t) = \frac{3}{4}\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega_1 t) = \frac{3}{4}\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(3\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi (s_1 en vert, s_2 en rouge, s_3 en bleu) :



2) Voici la décomposition en série de Fourier des différents signaux.

Signal n°1 :

$$s_1(t) = 9 + 4\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\omega_1 t + \pi)$$

Signal n°2 :

$$S_{m,k} = \frac{2}{k\pi} \qquad \phi_k = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } k \text{ impair} \\ +\dfrac{\pi}{2} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

Signal n°3 :

$$S_{m,2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\,\pi} \qquad \phi_k = -\frac{\pi}{2}$$

Ex. n°3 • Détermination de la nature d'un filtre ★☆☆ 9772

Dans tout l'exercice, il faut dessiner le circuit équivalent en BF et HF, puis déterminer $s(t)$ et conclure.

1) En BF, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Aucun courant ne circule donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. La loi des mailles donne donc $s(t) = e(t)$. Le filtre laisse passer les BF.

En HF, le condensateur est équivalent à un fil. La tension aux bornes d'un fil est nulle donc $s(t) = 0$. Le filtre coupe les HF.

Il s'agit d'un **passe-bas**.

---

2) En BF, la bobine est équivalent à un fil. La tension aux bornes d'un fil est nulle donc $s(t) = 0$. Le filtre coupe les BF.

En HF, la bobine est équivalent à un circuit ouvert. Aucun courant ne circule donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. La loi des mailles donne donc $s(t) = e(t)$. Le filtre laisse passer les HF.

Il s'agit d'un **passe-haut**.

3) En BF, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil. Aucun courant ne circule donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. La loi des mailles donne donc $s(t) = e(t)$. Le filtre laisse passer les BF.

En HF, le condensateur est équivalent à un fil. La tension aux bornes d'un fil est nulle donc $s(t) = 0$. Le filtre coupe les HF.

Il s'agit d'un **passe-bas**.

---

4) En BF, la bobine est équivalent à un fil. La tension aux bornes d'un fil est nulle donc $s(t) = 0$. Le filtre coupe les BF.

En HF, la bobine est équivalent à un circuit ouvert et le condensateur à un fil. Aucun courant ne circule donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. La loi des mailles donne donc $s(t) = e(t)$. Le filtre laisse passer les HF.

Il s'agit d'un **passe-haut**.

5) En BF, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Aucun courant ne circule donc la tension aux bornes de la résistance est nulle : $s(t) = 0$. Le filtre coupe les BF.

En HF, la bobine est équivalente à un circuit ouvert. Aucun courant ne circule donc la tension aux bornes de la résistance est nulle : $s(t) = 0$. Le filtre coupe les HF.

Le filtre va laisser passer les fréquences intermédiaires. Il s'agit d'un **passe-bande**.

---

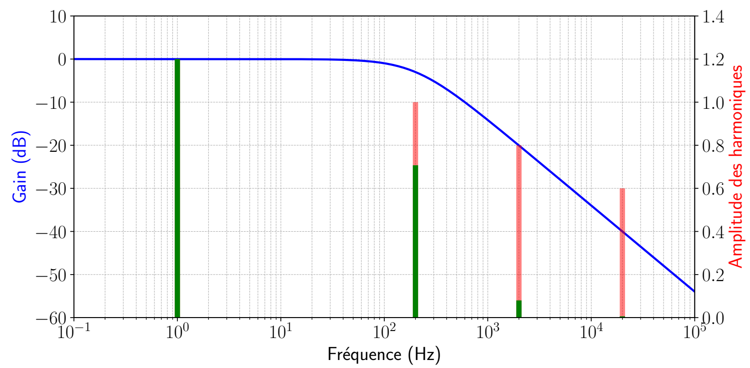
6) En BF, la bobine est équivalente à un fil. La tension aux bornes d'un fil est nulle : $s(t) = 0$. Le filtre coupe les BF.

En HF, le condensateur est équivalent à un fil. La tension aux bornes d'un fil est nulle : $s(t) = 0$. Le filtre coupe les HF.

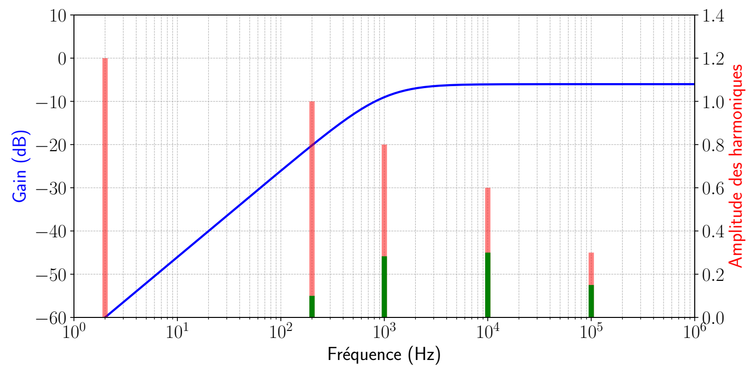
Le filtre va laisser passer les fréquences intermédiaires. Il s'agit d'un **passe-bande**

Ex. n°4 • Détermination graphique du signal de sortie ★☆☆ 2210

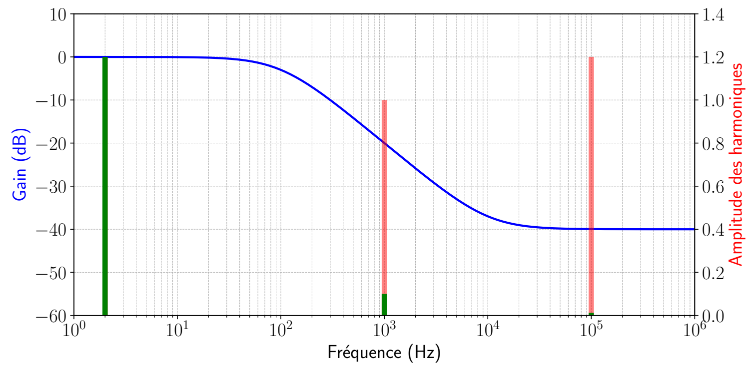
1)



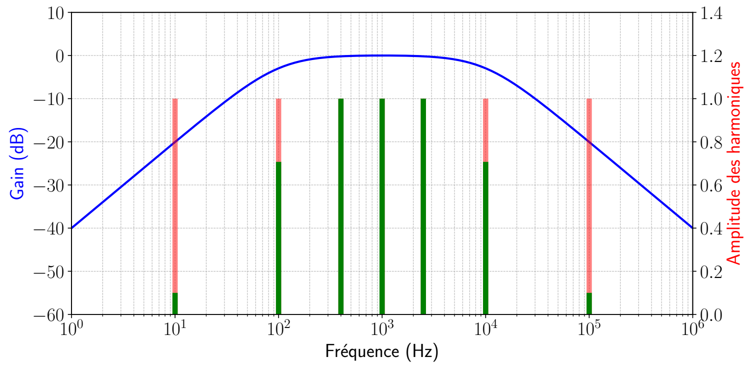
2)



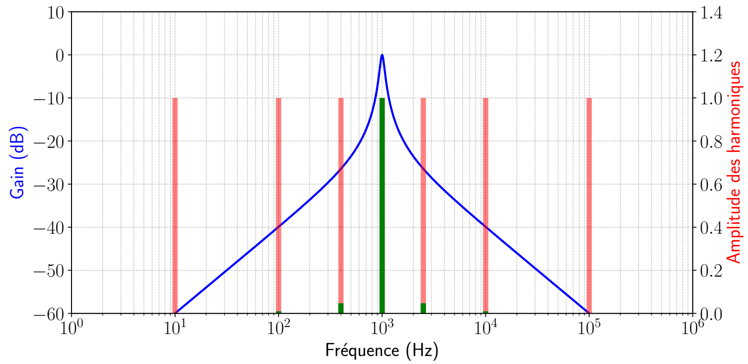
3)



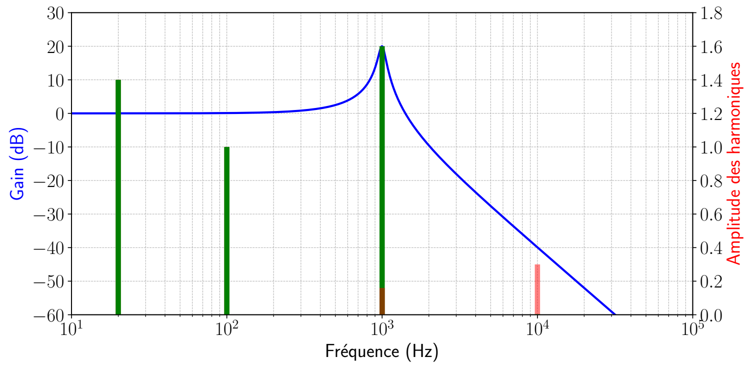
4)



5)



6)

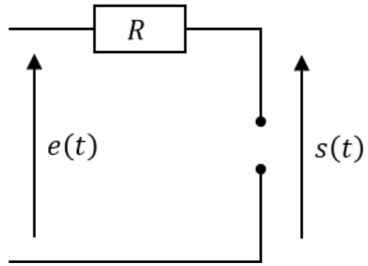


Ex. n°5 • Filtres RL ★☆☆ 3080

1)

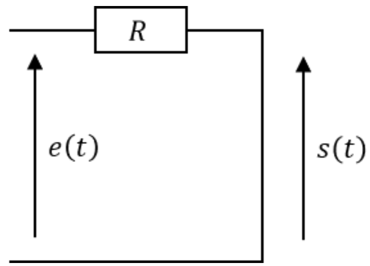
Filtre de gauche

Comportement BF



$s(t) = 0$

Comportement HF



$s(t) = e(t)$

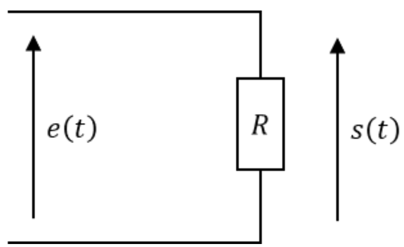
En BF : loi d'Ohm $s(t) = 0$

En HF : on a immédiatement $s(t) = e(t)$

Ce filtre laisse passer les HF et coupe les BF. C'est un filtre dit **passe-haut**.

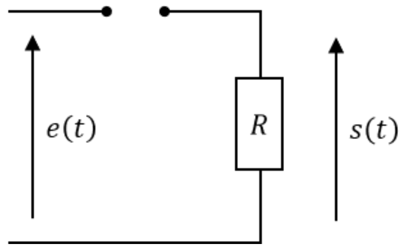
Filtre de droite

Comportement BF



$s(t) = e(t)$

Comportement HF



$s(t) = 0$

En BF : une loi des mailles donne immédiatement $s(t) = e(t)$

En HF : tension aux bornes d'un fil $s(t) = 0$

Ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF. C'est un filtre dit **passe-bas**.

2)

Filtre de gauche

On effectue un pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_L}}{R + \underline{Z_L}}\,\underline{e} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}\,\underline{e} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R}\,\underline{e}$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R} = \frac{jx}{1+jx} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}}$$

Filtre de droite

On effectue un pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{R}{R + \underline{Z_L}}\,\underline{e} = \frac{R}{R + j\omega L}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + j\omega L/R}\,\underline{e}$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\omega L/R} = \frac{1}{1+jx} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}}$$

3)

Filtre de gauche

<u>Fonction de transfert</u> :

$$\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$$

<u>Comportement BF</u> :

$$\underline{H} \simeq jx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log(x) \\ \phi = \arg(\underline{H}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$G_{\text{dB}} = 20\log(x)$ correspond à une pente de 20 dB/dcade

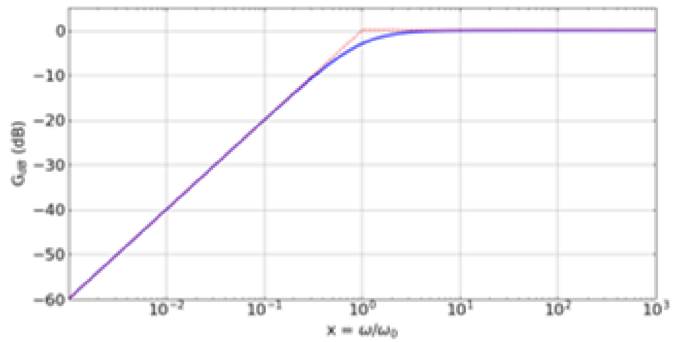
<u>Comportement HF</u> :

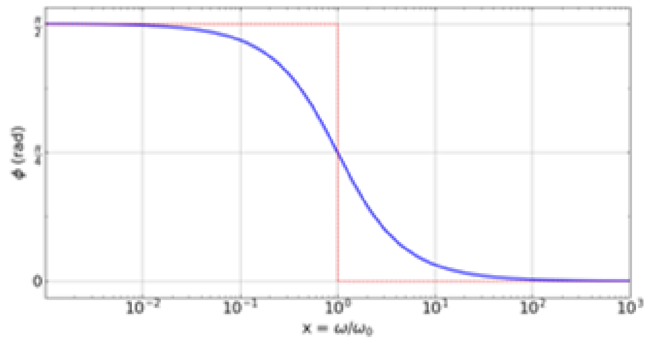
$$\underline{H} \simeq \frac{jx}{jx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 0 \\ \phi = \arg(\underline{H}) = 0 \end{cases}$$

<u>Cas où $x = 1$</u> :

$$\underline{H} = \frac{j}{1+j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{ dB} \\ \phi = \arg\left(\dfrac{j}{1+j}\right) = \arg(j) - \arg(1+j) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

On en déduit les diagrammes de Bode réel et asymptotique.





Filtre de droite

Commençons par tracer le diagramme de Bode asymptotique. Méthode :

- Déterminer les asymptotes en BF ($x \ll 1$) et HF ($x \gg 1$)
- Extrapoler les asymptotes jusqu'en $x = 1$

Puis, on trace le diagramme de Bode réel : tracer une courbe reliant les asymptotes BF et HF en passant par la valeur exacte de $\underline{H}$ pour $x = 1$.

Fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{1}{1+jx}$$

Comportement BF :

$$\underline{H} \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 0 \\ \phi = \arg(\underline{H}) = 0 \end{cases}$$

Comportement HF :

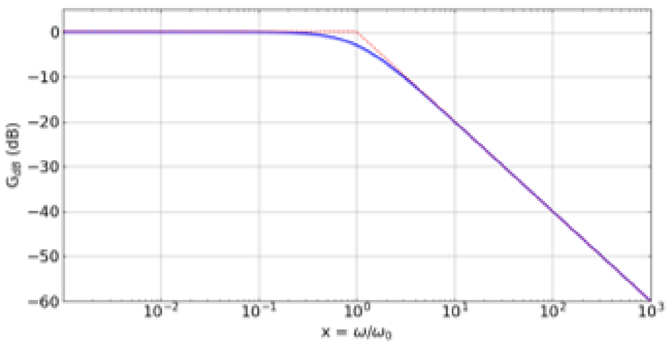
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{jx} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 20\,\log\left(\frac{1}{x}\right) = -20\,\log(x) \\ \phi = \arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

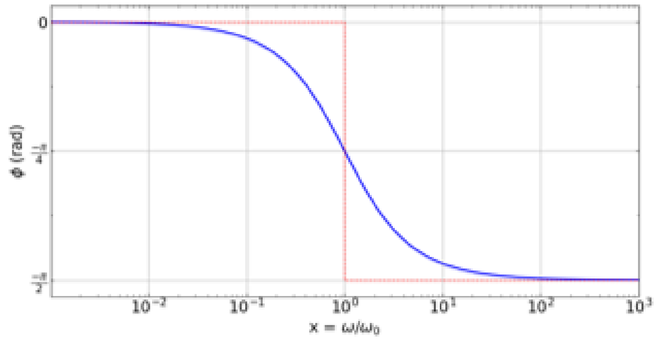
$G_{\mathrm{dB}} = -20\,\log(x)$ correspond à une pente de -20 dB/dcade

Cas où $x = 1$:

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 20\,\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{ dB} \\ \phi = \arg\left(\frac{1}{1+j}\right) = -\arg(1+j) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

On en déduit les diagrammes de Bode réel et asymptotique.





4)

Filtre de gauche

Par définition de la pulsation de coupure :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = \max(G_{\mathrm{dB}}) - 3\text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \omega_0}$$

La bande passante correspond alors à l'intervalle :

$$\boxed{\omega \in [\omega_c; \infty]}$$

Filtre de droite

Par définition de la pulsation de coupure :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = \max(G_{\mathrm{dB}}) - 3\text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \omega_0}$$

La bande passante correspond alors à l'intervalle :

$$\boxed{\omega \in [0; \omega_c]}$$

Ex. n°6 • Filtre 2R(CR) ★⯪☆ 0146

1) Dans la limite BF, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Un pont diviseur de tension donne alors :

$$s(t) = \frac{R}{R+2R}\,e(t) = \frac{e(t)}{3}$$

Le circuit laisse passer les basses fréquences.

Dans la limite HF, le condensateur est équivalent à un fil. Ainsi, $s(t) = 0$. Le circuit coupe les hautes fréquences.

Il s'agit donc d'un **passe-bas**.

2) On pose $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance équivalente de la résistance et du condensateur en dérivation.

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

À l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{H(\omega)} = \frac{\underline{s(t)}}{\underline{e(t)}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{2R + \underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{3 + j\omega 2RC} = \frac{1/3}{1 + j\dfrac{\omega}{3/2RC}}$$

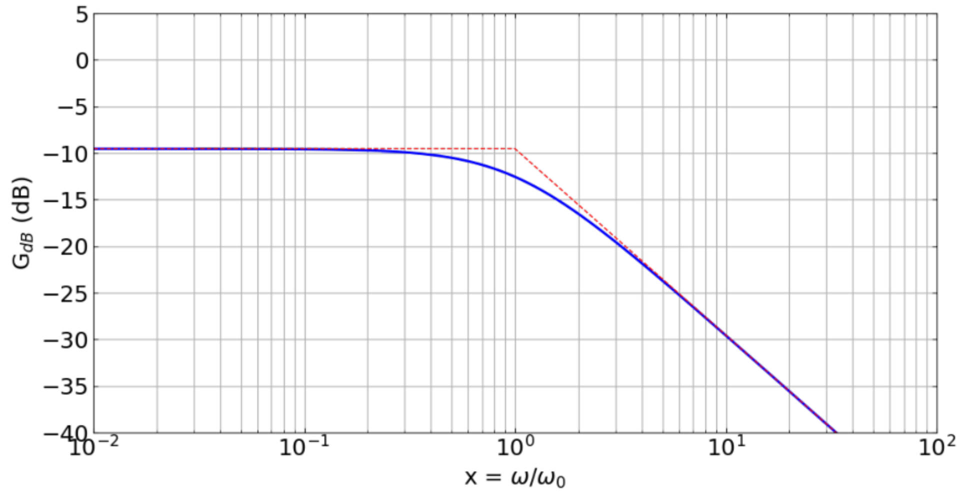
On trouve bien la forme demandée avec : $\boxed{H_0 = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\omega_0 = \frac{3}{2RC}}$.

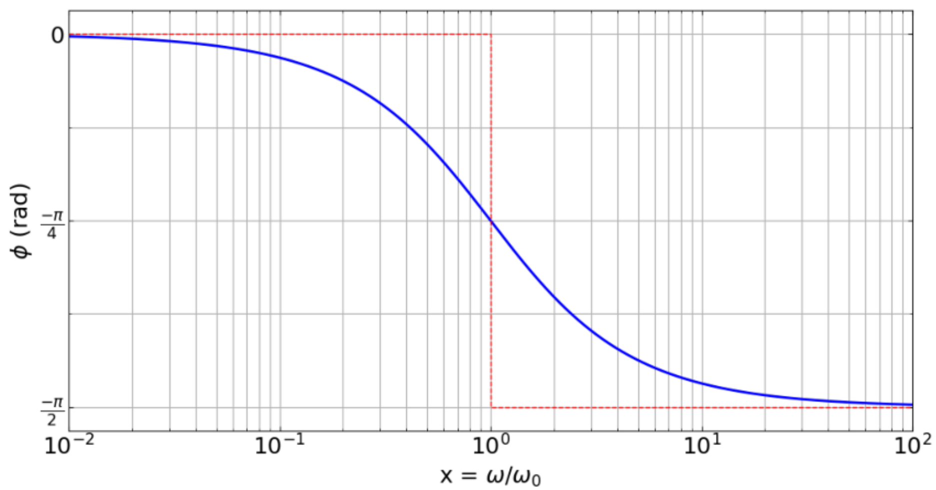
3) Il s'agit d'un filtre d'ordre 1.

4) Déterminons les comportements asymptotiques du gain et de la phase.

	BF ($\omega \ll \omega_0$)	HF ($\omega \gg \omega_0$)
$\underline{H}$	$\underline{H} \sim H_0$	$\underline{H} \sim \dfrac{H_0}{j\omega/\omega_0}$
G_{dB}	$G_{dB} = 20\log(H_0) = -9{,}54$ dB Pente nulle	$G_{dB} = 20\log(H_0) - 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$ Pente de -20 dB/decade
ϕ	$\phi = 0$	$\phi = -\dfrac{\pi}{2}$

Les deux asymptotes de se croisent en $\omega = \omega_0$.





5) Les fréquences de coupures x_c vérifient :

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = \max(G_{\text{dB}}) - 3\text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \omega_0 = \frac{3}{2RC}}$$

La bande passante vaut : $\boxed{0 < \omega < \omega_0}$.

6) Le signal $e(t)$ possède trois composantes :

- Une composante continue dont l'amplitude est atténuée par 3.

- Une composante de pulsation $\omega_1 = \omega_0$ dont l'amplitude est atténuée par $3\sqrt{2} = 4,2$ et déphasée de $-\pi/4$.
- Une composante de pulsation $\omega_2 = 100 \times \omega_0$ dont l'amplitude est atténuée par 3000 environ (-50 dB environ) et déphasée de $-\pi/2$. On va pouvoir négliger cette composante.

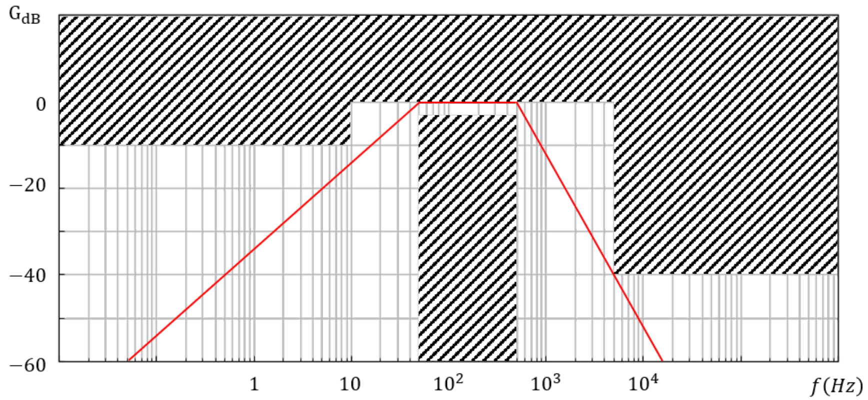
Ainsi, le signal de sortie vaut :

$$s(t) \simeq \frac{U_0}{3} + \frac{U_1}{3\sqrt{2}} \cos(\omega_1 t)$$

Pour aller plus loin

Ex. n°7 • Cahier des charges d'un microphone ★★☆ 9903

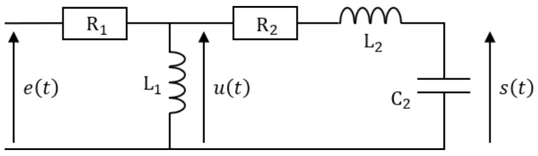
1)



2) Cf. question précédente

3) On associe un passe-haut d'ordre 1 avec un passe bas d'ordre 2 ou 2 passe-bas d'ordre 1.

Exemple :



Ex. n°8 • Filtrage d'une tension créneau par le filtre $R(L\|C)$ ★★☆ 7327

1) On pose l'impédance équivalente :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$

Avec un pont diviseur, on a :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R \times \underline{Z_{eq}}^{-1}} = \frac{1}{1 + j\left(\omega RC - \dfrac{R}{\omega L}\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{H_0 = 1} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\omega_0} = \omega RC \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{\omega L}$$

En combinant les deux dernières relations, il vient :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

2) Il s'agit d'un passe-bande d'ordre 2. On peut prendre : $L = 100$ mH, $C = 80$ µF et $R = 350\ \Omega$.

3) En BF :

$$\underline{H}(x \ll 1) \simeq \frac{jx}{Q} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\ log(x) - 20\ log(Q) \\ \phi = +\pi/2 \end{cases}$$

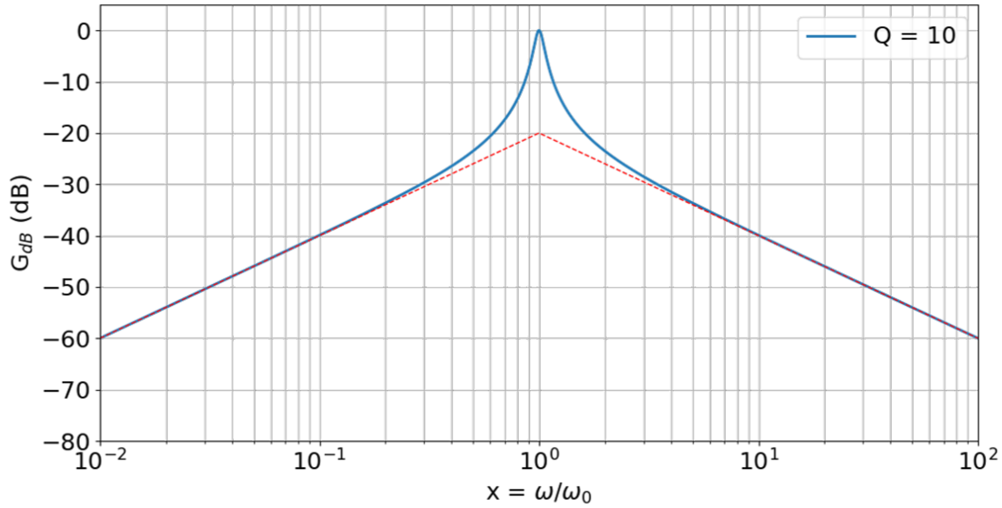
En HF :

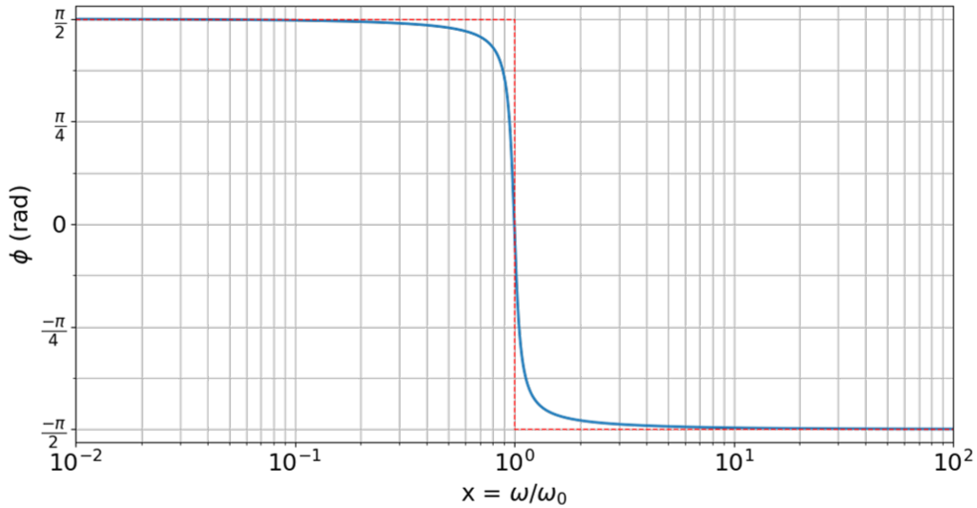
$$\underline{H}(x \gg 1) \simeq \frac{1}{jxQ} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = -20\ log(x) - 20\ log(Q) \\ \phi = -\pi/2 \end{cases}$$

Pour $x = 1$:

$$\underline{H}(x = 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

On en déduit le graphe :





4) A correspond à la valeur moyenne du signal. Donc :

$$\boxed{A = \frac{E_0}{2}}$$

5) Le filtre possède une bande-passante très étroite. Le fondamental est choisi pour être exactement sur la fréquence de résonance, cette composante passe donc à travers le filtre. L'harmonique de rang 3 sera en revanche très atténué, on le néglige, ainsi que les harmoniques suivants. La composante continue est parfaitement coupée.

On en déduit :

$$\boxed{s(t) \simeq \frac{2E_0}{\pi}\,\sin(\omega_c t)}$$

6) Tout le spectre de $e(t)$ est dans la pente de -20 dB/dec. Le filtre se comporte donc comme un intégrateur. En revanche, il atténue grandement l'amplitude du signal. On a donc en sortie un signal triangle de faible amplitude.

Ex. n°9 • Identification d'un filtre inconnu ★★☆ 7708

1) On voit graphiquement une sinusoïde qui oscille rapidement dans une sinusoïde qui oscille plus lentement. On a donc bien : $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$. On note :

$$e(t) = A_1\,\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2\,\cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

Les deux sinusoïdes passent par 0 en $t = 0$ (puis sont croissantes). Il s'agit donc de sinus, donc : $\boxed{\phi_1 = \phi_2 = -\frac{\pi}{2}}$. Le premier sinus fait une période en 2 ms. Durant ce temps, l'autre en fait 10. Ainsi : $\boxed{f_1 = 500\text{ Hz}}$ et $\boxed{f_2 = 5\text{ kHz}}$. Enfin, on peut lire les amplitudes : $\boxed{A_1 = 1{,}0\text{ V}}$ et $\boxed{A_2 = 0{,}5\text{ V}}$.

2) On note B les amplitudes de sortie. On peut lire : $\boxed{B_1 = 0{,}9\text{ V}}$ et $\boxed{B_2 = 0{,}1\text{ V}}$.

3) On observe que la composante de fréquence élevée est davantage atténuée : le filtre est donc un passe-bas.

4) On applique la formule du filtre pour les deux fréquences f_1 et f_2.

$$|\underline{H}(f_1)| = \frac{B_1}{A_1} = 0{,}9 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + (f_1/f_c)^2}}$$

$$|\underline{H}(f_2)| = \frac{B_2}{A_2} = 0{,}2 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + (f_2/f_c)^2}}$$

On fait le rapport pour éliminer H_0 puis on isole f_c.

$$\sqrt{\frac{1 + (f_2/f_c)^2}{1 + (f_1/f_c)^2}} = \frac{0{,}9}{0{,}2} = 4{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_c = \sqrt{\frac{f_2^2 - (4{,}5 \times f_1)^2}{4{,}5^2 - 1}} = 1{,}0\text{ kHz}}$$

On eut ensuite en déduire la valeur de H_0 :

$$\boxed{H_0 = 0{,}9 \times \sqrt{1 + (f_1/f_c)^2} = 1{,}0}$$

5) On peut simplement prendre le filtre RC passe-bas du cours. Pour rappel : $\omega_c = 1/RC$, soit :

$$RC = \frac{1}{2\pi f_c} = 1{,}6 \times 10^{-4} \text{ s}$$

On peut donc choisir par exemple : $\boxed{R = 1{,}6 \text{ k}\Omega}$ et $\boxed{C = 100 \text{ nF}}$.

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°10 • Filtre R_1R_2C ★★☆ 6604

1) En basses fréquences, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Aucun courant ne passe, et la loi des mailles donne donc :

$$\text{BF} \quad \Rightarrow \quad s(t) = e(t)$$

En hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil électrique. Un pont diviseur de tension donne :

$$\text{HF} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) = \frac{e(t)}{10}$$

2) Un pont diviseur de tension donne :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R_1 + \underline{Z_{eq}}} \quad \text{avec :} \quad \underline{Z_{eq}} = R_2 + \frac{1}{j\omega C}$$

Ainsi,

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega \left(R_1 + R_2\right) C}}$$

On identifie donc :

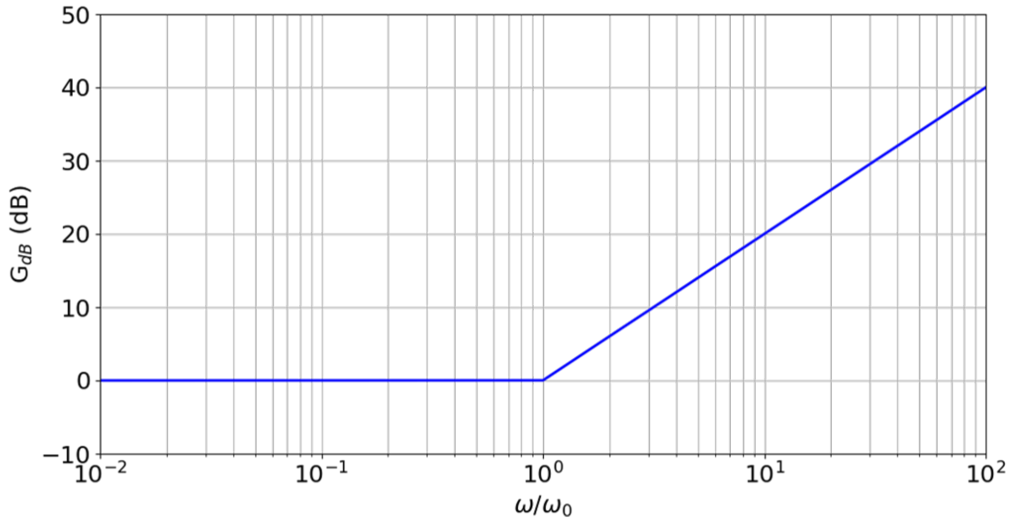
$$\boxed{H_1 = 1 \qquad \omega_1 = \frac{1}{R_2 C} \qquad \omega_2 = \frac{1}{\left(R_1 + R_2\right) C} = \frac{\omega_1}{10}}$$

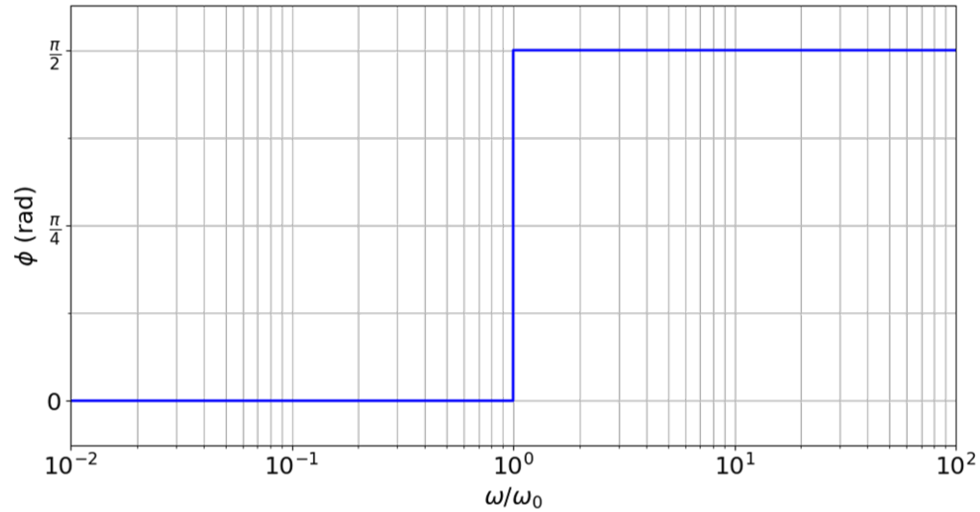
3) On a :

$$\omega \ll \omega_0 \ \Rightarrow \ \underline{H_0}(\omega) \simeq 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_0 \ \Rightarrow \ \underline{H_0}(\omega) \simeq \frac{j\omega}{\omega_0} \ \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = 20 \ log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \phi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

On en déduit le diagramme de Bode :





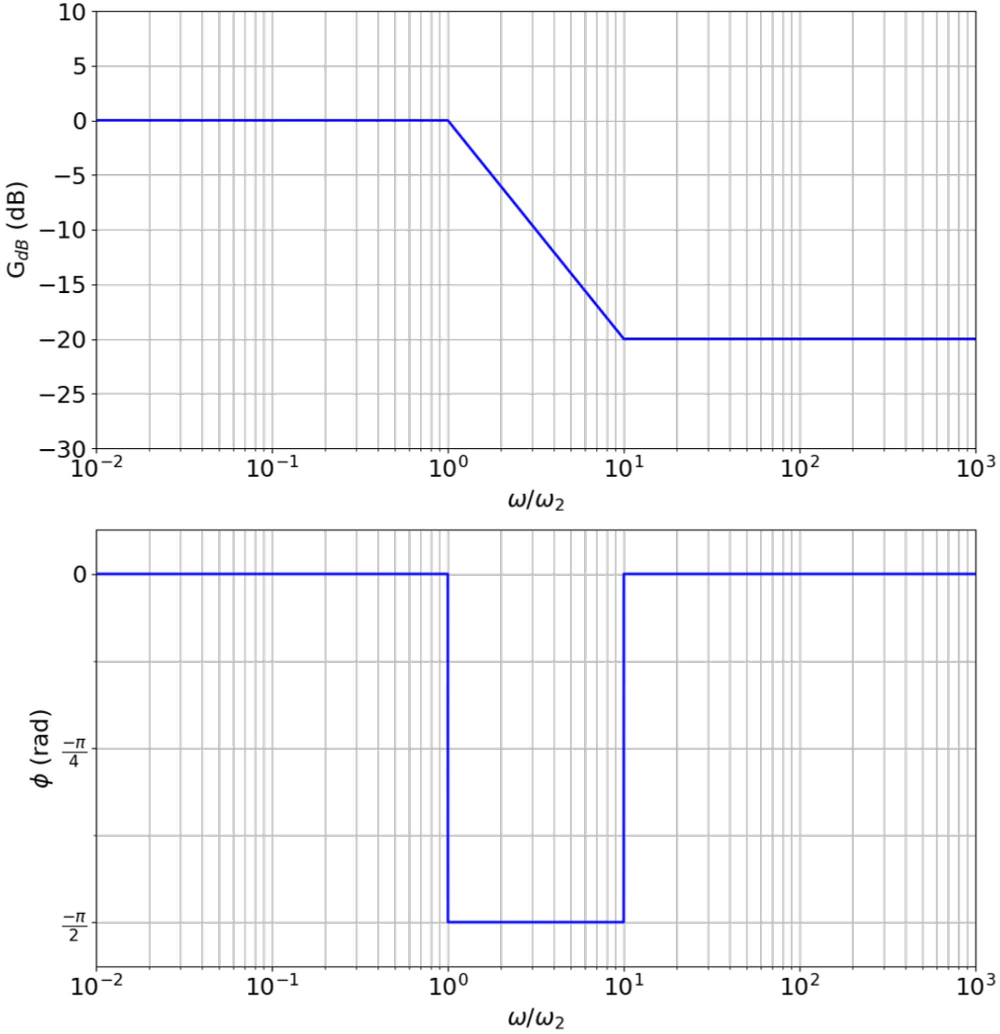
4) Notons :

$$\underline{H_1}(\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \underline{H_2}(\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{H_1}(\omega)}{\underline{H_2}(\omega)}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} G_{dB} = G_{dB,1} - G_{dB,2} \\ \phi = \phi_1 - \phi_2 \end{cases}$$

Donc :



5) Le signal d'entrée possède une composante continue de 5 V et une amplitude de 5 V. Ce filtre conserve toujours la composante continue. La pulsation du créneau est de la très HF ($\omega/\omega_2 = 100$) pour ce filtre, tous les harmoniques vont donc être amortis d'un facteur 10.

En sortie, on a donc un signal créneau qui oscille entre 4,5 V et 5,5 V à la même pulsation que le signal d'entrée.

Ex. n°11 • Filtre $R_1(C\|R_2)$ ★★☆ 1407

1) En BF, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. On applique le pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\underline{e}$$

Ce filtre laisse passer les BF mais les atténue légèrement.

En HF, le condensateur est équivalent à un fil. La tension aux bornes d'un fil est nul, donc :

$$\underline{s} = 0$$

Ce filtre coupe les hautes fréquences.

Il s'agit donc d'un passe-bas.

2) On pose l'impédance équivalente :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)^{-1} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R_1 + \underline{Z_{eq}}} = \frac{R_2}{R_1\left(1 + j\omega R_2 C\right) + R_2}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par $R_1 + R_2$.

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx} \quad \text{avec :} \quad H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

3) Ordre 1.

4) En BF :

$$\underline{H}(x \ll 1) \simeq H_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\ log(H_0) \\ \phi = 0 \end{cases}$$

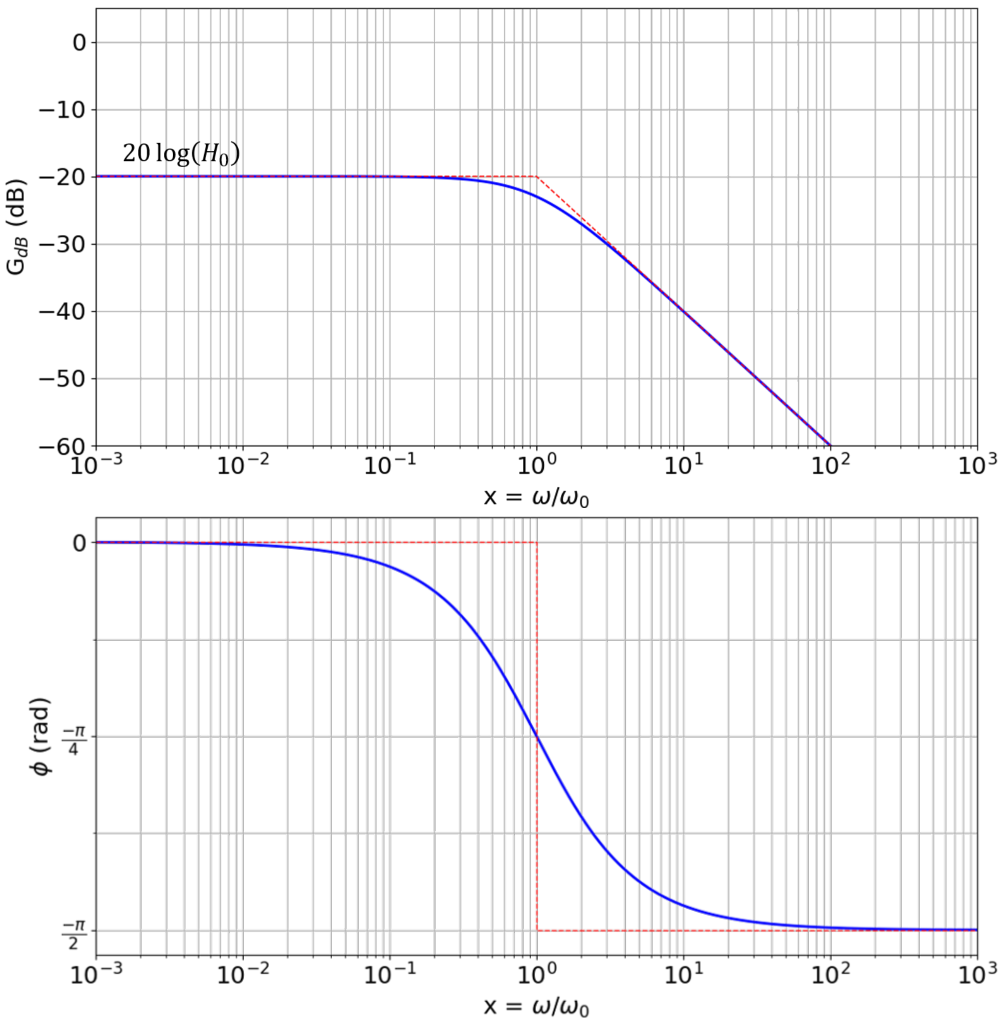
En HF :

$$\underline{H}(x \gg 1) \simeq \frac{H_0}{jx} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\ log(H_0) - 20\ log(x) \\ \phi = -\pi/2 \end{cases}$$

Pour $x = 1$:

$$\underline{H}(x=1) = \frac{H_0}{1+j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\ log(H_0) - 3 \\ \phi = -\pi/4 \end{cases}$$

On en déduit le graphe (tracer pour $H_0 = 1/10$) :



5) Cf. question précédente : la fréquence de coupure $f_c = f_0$ et la bande passante contient toutes les fréquences de 0 à f_0.

6) La compose continue survie au filtre passe-bas (mais elle est atténuée). La composante à $\omega = 100\ \omega_c$ est une très haute fréquence, elle est coupée par le filtre. Ainsi,

$$s(t) \simeq H_0 E = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\ E$$

7) La composante continue ($E/2$) passe toujours en étant atténuée par un facteur H_0. Tout le reste du spectre de $e(t)$ est dans la pente de -20 dB/dec. Le filtre se comporte donc comme un intégrateur. En revanche, il atténue grandement l'amplitude du signal. On a donc en sortie un signal triangle de faible amplitude, oscillant autour d'une valeur moyenne $H_0 E/2$.

8) Les premiers harmoniques passent (en étant atténués). Les harmoniques de haut rang sont de plus en plus coupés. Intuitivement, on a donc un signal créneau de valeur moyenne $H_0 E/2$ avec des frontières « arrondies ». En réalité, on sait qu'il s'agit de charges / décharges du condensateur. Le signal de sortie est donc une série de charges exponentielles (plateau à $H_0 E$) et décharges exponentielles (plateau à 0).

Ex. n°12 • Oscillateur vertical en régime périodique

6440

1) On rappelle la forme canonique :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\ \dot{x}(t) + \omega_0^2\ x(t) = \omega_0^2\ x_{\mathrm{A}}(t)$$

On en déduit :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{h}}$$

2) On passe en notation complexe :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\ \dot{x}(t) + \omega_0^2\ x(t) = \omega_0^2\ x_{\mathrm{A}}(t) \quad \Rightarrow \quad \left(-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{X_m} = \omega_0^2 X_{\mathrm{A}m}$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{j\omega\omega_0}{Q}}}$$

3) Il y a une résonance si $\left|\underline{X_m}\right|$ passe par un maximum. Or,

$$\left|\underline{X_m}\right| = \frac{\omega_0^2 X_{\mathrm{A}m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

On pose :

$$g(\omega) = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2$$

On cherchons donc un minimum de $g(\omega)$.

$$g'(\omega) = -4\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \frac{2\omega\omega_0^2}{Q^2} = 4\omega\left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2Q^2}\right) = 4\omega\left(\omega^2 - \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)$$

On en déduit la pulsation (non nulle) qui annule $g'(\omega)$:

$$\boxed{\omega_{\text{res}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{avec :} \quad Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

On en déduit la fréquence de résonance :

$$\boxed{f_{\text{res}} = \frac{\omega_{\text{res}}}{2\pi} = 2{,}0 \text{ Hz} = f_0}$$

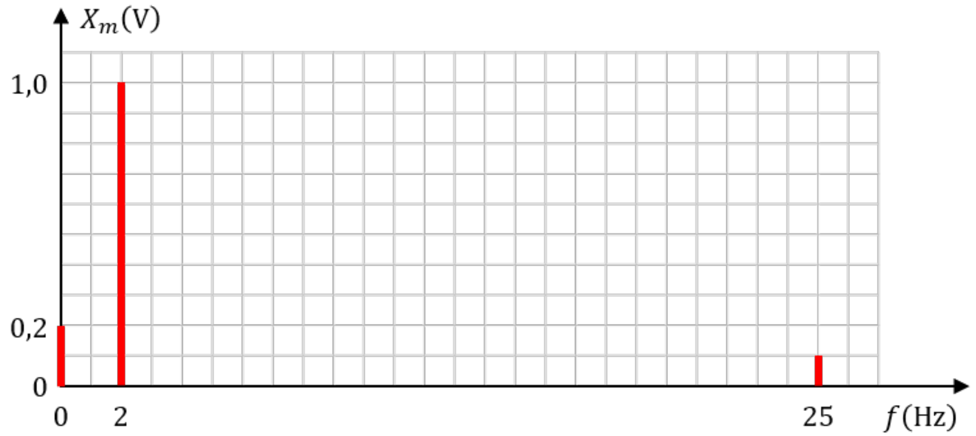
4) Pour le gain :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\text{BF}) = 0 \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(\text{HF}) = -40\,\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Pour la phase :

$$\boxed{\phi(\text{BF}) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(\text{HF}) = -\pi}$$

5)

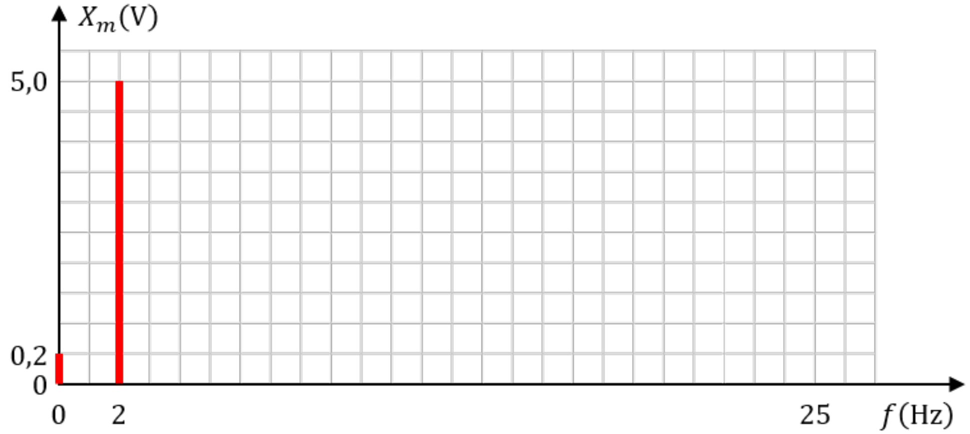


6) En notation complexe :

$$\underline{x}(t) = X_0 \times \underbrace{\underline{H}(0)}_{=1} \quad + \quad \underline{X_{1m}}\,e^{\omega_1 t} \times \underbrace{\underline{H}(\omega_1)}_{=-jQ} \quad + \quad \underline{X_{2m}}\,e^{\omega_2 t} \times \underbrace{\underline{H}(\omega_1)}_{\simeq -\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)^2 = 6{,}4\times10^{-3}}$$

Le dernier terme est négligeable. On en déduit, en réel :

$$\boxed{x(t) = X_0 + X_{1m}Q\,\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = X_0 + X_{1m}Q\,\sin(\omega_1 t)}$$



7) On dérive :

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = X_{1m}Q\omega_1\,\cos(\omega_1 t)}$$